

卡拉比-丘代数的导出表示概型与平移泊松结构*

陈小俊¹, 陈友明², A. 艾西玛多夫³, F. 艾西玛多夫⁴

(1. 四川大学数学学院, 四川 成都 610064;

2. 重庆理工大学理学院, 重庆 400054;

3. 托莱多大学数学与统计系, 美国俄亥俄州托莱多 43606;

4. 首都师范大学北京成像理论与技术高精尖创新中心, 北京 100048)

摘要: 导出非交换代数几何是目前数学领域最活跃的分支之一。撷取近年来人们在这一领域里的几个结果向读者作简单介绍, 内容侧重于介绍导出的非交换辛结构、非交换泊松结构, 以及它们与卡拉比-丘代数和卡拉比-丘范畴之间的关系。

关键词: 导出非交换几何; 非交换泊松结构; 非交换辛结构; 卡拉比-丘范畴

中图分类号: O186 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2020) 05-0001-18

The shifted Poisson structure on derived representation schemes of Koszul Calabi-Yau algebras

CHEN Xiaojun¹, CHEN Youming², Alimjon ESHMATOV³, Farkhod ESHMATOV⁴

(1. School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China;

2. School of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China;

3. Department of Mathematics and Statistics, University of Toledo, Toledo OH 43606, USA;

4. Beijing Advanced Innovation Center for Imaging Theory and Technology, Capital Normal University, Beijing 100048, China)

Abstract: Derived noncommutative algebraic geometry is one of the most active research fields in mathematics. Several important results that mathematicians have obtained in this field are reviewed, with an emphasis on the derived noncommutative symplectic structure, noncommutative Poisson structure, and their relationships with Calabi-Yau algebras and Calabi-Yau categories.

Key words: derived noncommutative geometry; noncommutative Poisson structure; noncommutative symplectic structure; Calabi-Yau category

* 收稿日期: 2020-03-04

基金项目: 国家自然科学基金 (11671281, 11890663)

作者简介: 陈小俊 (1976年生), 男; 研究方向: 非交换几何、代数拓扑与数学物理; E-mail: xjchen@scu.edu.cn

通信作者: 陈友明 (1985年生), 男; 研究方向: 微分几何与数学物理; E-mail: youmingchen@cqut.edu.cn

陈小俊, 男, 四川大学数学科学学院教授。2007年于美国纽约州立大学 Stony Brook 分校获博士学位。2007年9月~2011年6月, 在美国密歇根大学 Ann Arbor 分校从事博士后研究。2012年1~8月访问德国 Max Planck 数学研究所。研究方向为弦拓扑与非交换代数几何。主持国家自然科学基金面上项目两项, 参加自然科学基金重大项目1项。其构造出的 Fukaya 范畴上的李双代数、一类非交换空间上的非交换 Poisson 结构等工作得到 Wolf 奖得主 Sullivan 等人的好评。曾入选四川省“百人计划”青年项目。

在代数几何中,仿射概型(affine scheme)组成的范畴与交换代数组成的范畴是等价的。在此对应下,一个几何对象(或者结构)可以用代数的语言来描述,反之亦是如此。例如,仿射概型上的向量丛等价于对应的交换代数上的有限生成投射模,概型上的切向量场等价于对应的代数的导子(derivation),等等。

像投射模、导子这些概念,不仅仅对交换代数可以定义,它们对一般的结合代数也是可以定义的。一个自然的问题是:对于一个结合代数,是不是也存在类似“仿射概型”这样的空间,使得上面这些代数的概念可以对应到相应空间的几何结构上?

在过去几十年中,数学家们一直在寻找这样的空间,但是并不是很成功。虽然如此,我们仍然可以假想这些空间是存在的,并称之为“非交换空间”,这些非交换空间上的几何称为“非交换几何”。实际上,我们在研究几何结构的时候,往往是通过这些几何结构与其他已知空间上的几何结构的关系来得到相应的信息。如果我们收集的这种信息足够多,那么“窥一斑而知全豹”,这个假想的“非交换空间”的各种几何性质也就足够清楚了,或者更准确地说,对我们的研究而言,就已经足够了。

1 背景介绍

本文接下来从所谓的 Kontsevich-Rosenberg 原理出发,以非交换泊松几何和非交换辛几何为例,介绍非交换几何的研究思想、内容和方法。

我们需要指出的是,导出非交换代数几何是一个非常宏大的研究领域,囿于作者的学识,我们甚至不能对这一领域做一个大概的介绍。在本文中,我们只对我们感兴趣的几个问题做一个简介。读者们不要误认为导出非交换几何仅限于我们文中介绍的几个专题。

1.1 Gelfand-Naimark 定理和 Gabriel 定理

一般认为,非交换几何的研究肇始于 Gelfand-Naimark 定理。设 M 是一个局部紧致的 Hausdorff 拓扑空间。我们记 $\mathcal{C}(M)$ 为 M 上复值连续函数组成的集合,可以证明它是一个交换的 C^* 代数。1943 年, Gelfand 和 Naimark 证明了:一个交换的 C^* 代数决定一个拓扑空间(作为集合,它由该 C^* 代数的极大理想组成),使得该代数同构于这个拓扑空间上的复值连续函数。也就是说, M 和 $\mathcal{C}(M)$ 互相决定对方。一般情况下,一个 C^* 代数不一定是交换的,那么我们有没有类似的 Gelfand-Naimark 定理呢? 菲尔兹奖获得者 Connes 创立的非交换微分几何说:对于不交换的 C^* 代数,我们可以假想存在一个空间,使得上面的 Gelfand-Naimark 定理“理论上”成立;特别是在做一些计算的时候,我们在很多时候并不需要关注这些 C^* 代数是否来自于一个真实的空间。该假想存在的空间,一般就称为“非交换空间”,其上的微分几何,就是“非交换微分几何”。

在 Grothendieck 学派的代数几何研究中, Gabriel 证明了一个类似的定理:两个概型同构当且仅当它们的凝聚层范畴是等价的。也就是说,概型的凝聚层范畴完全决定了这个概型本身。例如,概型的 K-理论,它是凝聚层的不变量,因此要研究 K-理论,我们只要知道凝聚层就够了。

遵循 Grothendieck 学派的这一思想,在 1990 年代, Artin 和 Zhang 在非交换几何领域做出了极富价值的探索。他们以及很多数学家们如 Tate、Smith、Van den Bergh 的工作,成为了数学的一个研究分支,被称为“非交换射影几何”。

1.2 Kontsevich-Rosenberg 原理

在 2000 年左右,菲尔兹奖获得者 Kontsevich 和 Rosenberg 提出了一个研究“非交换代数几何”的原理^[1]:对于一个非交换空间(在本文中,我们把它等同于一个结合代数;我们将会看到,实际情形不限于此),其上的非交换几何结构(例如我们下面要讨论的非交换辛结构、非交换泊松结构等),如果存在的话,它一定诱导该代数表示概型(representation scheme)上的经典几何结构(即通常的辛结构、泊松结构等)。

这一原理现在被人们称为 Kontsevich-Rosenberg 原理。那么,为什么要提出这个原理呢?它的道理何在?

要回答这个问题,我们需要回到文章开始提到的“交换代数-仿射概型”对应。对于一个交换代数 A ,

它对应的仿射概型是 A 的素理想组成的集合(谱), 称为素谱, 记为 $\text{Spec } A$ 。稍微熟悉代数几何的人都知道, $\text{Spec } A$ 中真正与我们所熟知的“点”对应的是 A 的那些极大理想, 记为 $\text{Spm } A$ 。这些极大理想组成的集合同构于

$$\text{Spm } A \cong \text{Hom}_{\text{Alg}}(A, k)$$

而后者又可以看成 A 的一维表示组成的集合。

现在, 如果我们令 k 是代数闭域, 那么表示论告诉我们, A 的所有不可约表示都是一维的。也就是说, 在此情形下, A 本质上没有高维的表示。但是, 如果 A 是一个结合且非交换的代数, 则情况大不相同: A 存在非平凡的不可约高维表示!

从这个观察, 我们可以认为: 对于一般的结合代数, 它对应的“素谱”(或者更准确地说, 极大理想组成的谱), 应该是它所有的表示组成的集合。如果我们记 $\text{Rep}_n A$ 为 A 的 n 维表示组成的集合(容易证明, 这是一个仿射概型), 那么

$$\text{“Spec } A\text{”} = \bigcup_n \text{Rep}_n(A)$$

由此, 我们得出: 结合代数 A 所对应的“非交换空间”(也即我们要找的“Spec A ”)上的几何结构, 一定会反映到 $\text{Rep}_n(A)$ 上; 反之, 如果对所有 n , $\text{Rep}_n(A)$ 上都自然地存在一个几何结构, 我们就说 A 上存在相应的非交换几何结构。这就是Kontsevich-Rosenberg原理提出的背景。

1.3 Kontsevich-Rosenberg原理的应用

Kontsevich-Rosenberg原理是一个十分美妙、十分深刻但同时也是非常粗略的原理。它给出了一个寻找非交换几何结构的指导原则, 但并不能给出一些非交换几何结构的具体刻画。虽然如此, 它仍然极大地激发了人们的研究兴趣, 并努力地寻找符合这一原理的“非交换几何结构”。

在2009年左右, 英国数学家Crawley-Boevey^[2]、比利时数学家Van den Bergh^[3]各自给出了一个版本的“非交换泊松结构”的定义; 与此同时, Crawley-Boevey和美国数学家Etingof、Ginzburg一起定义了“非交换辛结构”^[4]。

在第2小节中, 我们将给出这些结构的具体定义。从Crawley-Boevey等的工作中, 我们可以观察到“喜忧参半”的两点:

(i) 对于一般的结合代数 A , $\text{Rep}_n(A)$ 是一个不光滑的仿射概型, 因此要刻画其上的通常几何对象如微分形式、切向量场等等, 都是非常困难的;

(ii) 对于自由的结合代数, $\text{Rep}_n(A)$ 又是相当简单的, 就是多项式的素谱, 因此其上的几何对象很容易给出。

这两点促使康奈尔大学的数学家Berest等思考如下问题: 对于一般的结合代数 A , 能否找自由的结合代数来逼近 A , 从而得到相应的多项式来“逼近” $\text{Rep}_n(A)$? 如果我们扩大研究的范畴, 考虑“微分分次结合代数”组成的范畴, 那么, 上述问题的答案是可能的。Berest等^[5-6]的结果说: 一个结合代数 A , 总存在一个自由的微分分次代数的逼近, 与此同时, 该逼近也给出了 $\text{Rep}_n(A)$ 的自由的微分分次交换代数的逼近。该 $\text{Rep}_n(A)$ 的充分逼近, 被Berest等称为“导出表示概型”(derived representation scheme)。当然这些“逼近”, 并不是任意的, 而是基于1960年代菲尔兹奖获得者Quillen发展的“有理同伦论”(Rational homotopy theory)。

1.4 Berest等的导出表示概型

根据有理同伦论, 特征为0的数域 k 上的微分分次结合代数组成的范畴, 记成DGA, 具有“模型范畴”结构, 因而每一个结合代数(把它看成具有0微分的微分分次代数)可以由一个自由的微分分次结合代数来逼近, 也就是存在一个“预解”(resolution)

$$(QA, d) \rightarrow A$$

其中 d 是微分, 使得同调群 $H_*(QA, d) \cong A$, 并且这个逼近是内蕴的、在相差一个同伦的意义下是唯一的。

类似地, 数域 k 上的交换微分分次代数组成的范畴, 记作CDGA, 作为微分分次结合代数的子范畴, 也具有“模型范畴”结构, 因而每一个交换代数也可以由一个自由的、交换的微分分次代数来逼近。

这两个范畴在拟同构下的局部化, 称为它们的同伦范畴。现在将 $\text{Rep}_n(A)$ 与其对应的交换代数等同,

Berest 等^[5] 证明函子

$$\text{Rep}_n: \text{DGA} \rightarrow \text{CDGA}, \quad A \mapsto \text{Rep}_n(A)$$

可以提升到两者的同伦范畴上。直观地说, 对于一个结合代数 A , 如果 QA 是它的一个自由逼近, 那么 $\text{Rep}_n(QA)$ 就是 $\text{Rep}_n(A)$ 的一个“充分好”的逼近。

当然, 在这里我们需要证明, 对于微分分次代数, $\text{Rep}_n(A)$ 也是有意义的, 但这并不困难。Berest 等称 $\text{Rep}_n(QA)$ 为 A 的“导出表示概型”。

利用导出表示概型, 我们可以将 Crawley-Boevey 等的构造推广到微分分次代数的同伦范畴, 从而非常轻松地构造一大类 (导出意义下的) 非交换的泊松结构和非交换的辛结构。

我们需要注意到一点是: 我们这里所有的构造都需要将“微分分次”这个条件考虑进去。例如在研究导出的非交换辛结构时, 我们需要构造“切空间”与“余切空间”的同构, 如果把微分分次这样条件考虑进去, 我们需要将其中一个空间 (实际上是链复形) 进行一定的平移, 才能得到同构 (或者拟同构)。这样的辛结构称为“平移辛结构” (shifted symplectic structure)。类似地, 我们也有“平移泊松结构”的概念。

1.5 卡拉比-丘范畴与卡拉比-丘代数

假设 X 是一个卡拉比-丘射影代数簇。我们考虑 X 上的有界凝聚层范畴的导出范畴, 记为 $D(X)$ 。由于 X 的典则层 (canonical sheaf) 是平凡的, 因此 $D(X)$ 上的 Serre 函子是恒同函子。对于任意两个凝聚层 \mathcal{E}, \mathcal{F} , 我们有 Serre 对偶定理:

$$\text{Hom}_{D(X)}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \cong \text{Hom}_{D(X)}(\mathcal{F}, \mathcal{E}[n])^* \quad (1)$$

如果我们令 $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, Toën 等^[7] 的结果说, $\text{Hom}_{D(X)}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$, 作为分次线性空间在相差一次平移下, 可以看成 $D(X)$ 中凝聚层组成的模空间在 \mathcal{E} 处的切空间, 因而同构 (1) 可以看成切空间和余切空间的一个同构 (在相差 $(2-n)$ 次平移下)。由此, 我们可以得到一个结论: $D(X)$ 的模空间上存在一个平移辛结构。

当然, 具有同构 (1) 的三角范畴是很多的, 这样的范畴称为“卡拉比-丘范畴” (Calabi-Yau category)。很多的卡拉比-丘范畴等价于一个结合代数的模范畴的导出范畴, 这样的结合代数在很多情况下是“卡拉比-丘代数” (Calabi-Yau algebra)。由此, 我们得到一串构造:

$$\text{卡拉比-丘代数} \rightarrow \text{卡拉比-丘范畴} \rightarrow \text{平移辛结构}$$

一个自然的问题是: 卡拉比-丘代数上的什么结构导致了其 (模范畴的) 导出范畴上的平移辛结构? 这个问题的答案, 如果存在的话, 可以看成是 Kontsevich-Rosenberg 原理的推广。

在接下来的小节里, 我们将对上面出现的这些概念和结果进行进一步的介绍。

2 非交换辛结构和非交换泊松结构

在物理学中, 辛结构和泊松结构是最基本的概念之一, 它们最初出现于 19 世纪 Poisson、Hamilton 和 Jacobi 等关于理论力学的研究当中, 并由此获得了人们广泛的研究。到了 20 世纪 80 年代, 数学和物理又进入了一个大融合的时代, 新的理论、新的结构层出不穷。例如物理学中的杨-米尔斯理论、超弦理论, 被很多数学家进行了深刻的研究, 数学中的纽结理论、陈-西蒙斯理论等等在物理中亦有重要的应用。

在这些理论层出不穷的同时, 有识之士如 Kontsevich、Sullivan 等亦在不断地反思, 去芜存菁, 发掘、总结这些看上去毫不相关的理论背后的共同点, 并通过演绎类比, 探索、发现一些往往被人忽略了的新结构。

例如, 对于我们耳熟能详的泊松结构、辛结构, 经过 200 多年的发展, 我们几乎不能够期望再有什么新的发现了。但是, 通过发展导出的非交换代数几何, 将这些经典的概念作为这种新的几何的特殊情形, 我们不仅对这些概念有了全新的理解, 而且通过将很多新出现的概念, 如我们将要谈到的凝聚层范畴、Fukaya 范畴等纳入这一范畴之中, 这些古老的概念获得了新的内涵, 焕发了新的生机。

下面, 我们将从泊松代数的概念出发, 开始我们的导出非交换代数几何的探索之旅。

定义 1 (泊松代数) 设 A 是一个交换结合代数。如果 A 上存在着一个对每个分量都满足 Leibniz 法则的

李括号 $\{-, -\}$, 即对于任意的 $a, b, c \in A$,

$$\{a, bc\} = b\{a, c\} + \{a, b\}c \quad (2)$$

那么我们称 A 为一个泊松代数。

当代数 A 仅仅是一个结合代数而不具有交换性时, 若我们仍然按照刚才的定义来定义 A 上的泊松代数, 则 Farkas 和 Letzter 在文 [8, Theorem 1.2] 中证明了下列结论。

定理 1 设 A 是一个非交换的整环, 或者更一般地, 是一个非交换素环。若 A 上有李括号 $\{-, -\}$ 满足 Leibniz 法则 (2), 则存在一个 A 的中心元 λ 使得

$$\{a, b\} = \lambda(ab - ba)$$

也就是说, 若按照上面这种直接的方法定义非交换泊松结构, 则李括号本质上由交换子给出, 因此这一定义给出的非交换泊松结构是没有太大的意义的。在下面的几小节里, 我们介绍几种版本的非交换泊松结构和辛结构, 它们分别是: Crawley-Boevey 的 H_0 -泊松结构, Van den Bergh 的双泊松结构 (double Poisson structure), 以及 Crawley-Boevey, Etingof 和 Ginzburg 提出的双辛结构 (bi-symplectic structure), 并指出它们之间的联系。

2.1 Crawley-Boevey 的 H_0 -泊松结构

在本小节, 我们介绍 Crawley-Boevey 在文 [2] 中引进的 H_0 -泊松结构。记 $a \in A$ 在 $A/[A, A]$ 上的像为 \bar{a} , 其中 $[A, A]$ 是由 A 中的所有交换子生成的空间。若 $\delta: A \rightarrow A$ 是 A 的一个导子, 则

$$\delta[a, b] = [\delta a, b] + [a, \delta b]$$

由此 δ 诱导了 $A/[A, A]$ 上的一个线性映射 $\bar{\delta}: A/[A, A] \rightarrow A/[A, A], \bar{a} \mapsto \bar{\delta}(\bar{a})$ 。

定义 2 设 A 是一个结合代数。 A 上的一个 H_0 -Poisson 结构是指 $A/[A, A]$ 上一个满足以下条件的李括号 $\{-, -\}$: 对于任意的 $a \in A$, 伴随映射

$$\{\bar{a}, -\}: A/[A, A] \rightarrow A/[A, A], \bar{c} \mapsto \{\bar{a}, \bar{c}\}$$

可以提升为 $A \rightarrow A$ 的一个导子, 即存在 A 上的一个导子 δ 使得 $\bar{\delta} = \{\bar{a}, -\}$ 。

注记 1 (i) Crawley-Boevey 称上述概念为 H_0 -泊松结构的主要原因是因为 $A/[A, A]$ 实际上是 A 的 0-维 Hochschild (也是循环) 同调群。后来, Berest 等将这一概念推广到导出代数几何中, 这就涉及到所有的循环同调群了。

(ii) 在上述定义中, 如果 A 是交换的, 我们可以看到: H_0 -泊松结构就是通常的泊松结构。在这个意义下, H_0 -泊松结构可以说是交换代数的泊松结构的非交换推广 (在 §2.6 我们将讨论泊松结构的非交换推广的另一个版本)。

Crawley-Boevey 在文章中证明:

定理 2 ([2] Theorem 1.6) 设 A 是特征为 0 的数域 k 上的一个结合代数。如果 A 上存在一个 H_0 -泊松结构, 则

$$\text{Rep}_n(A)//\text{GL}(n)$$

上存在着一个自然的泊松结构。

这个定理主要用到了 Procesi 的一个结论: 考虑“迹映射”

$$\text{Tr}: A \rightarrow \mathcal{O}(\text{Rep}_n(A)//\text{GL}(n)), a \mapsto \{\rho \mapsto \text{trace}(\rho(a))\}$$

其中 $\rho \in \text{Rep}_n(A)$, 则 Tr 的像生成 $\mathcal{O}(\text{Rep}_n(A)//\text{GL}(n))$ 。我们很容易在 Tr 的像集上定义一个李括号, 并且利用 H_0 -泊松结构中的导子性质, 把这个李括号定义到整个 $\text{Rep}_n(A)//\text{GL}(n)$ 上使之成为一个泊松代数。

我们注意到, 这个 H_0 -泊松结构非常好地符合了 Kontsevich-Rosenberg 原理。

2.2 Van den Bergh 的双泊松代数

大约与 Crawley-Boevey 同时, Van den Bergh 在文 [3] 中引进了“双泊松结构” (double Poisson structure)。

定义 3 (Van den Bergh) 设 A 是一个带幺元的结合代数。 A 上的一个双括号 (double bracket) 是一个

双线性映射 $\{\{-,-\}\}: A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ 使得

$$\begin{aligned}\{\{a, b\}\} &= -\{\{b, a\}\}^\circ, \\ \{\{a, bc\}\} &= b\{\{a, c\}\} + \{\{a, b\}\}c\end{aligned}$$

其中 $(u \otimes v)^\circ = v \otimes u$ 。这里 b 和 c 的作用是由 $A \otimes A$ 的双模结构给出的, 即: $b(a_1 \otimes a_2)c = ba_1 \otimes a_2c$ 。

设 $\{\{-,-\}\}$ 是 A 上的一个双括号。任取 $a, b_1, \dots, b_n \in A, s \in S_n$, 记

$$\begin{aligned}\{\{a, b_1 \otimes \dots \otimes b_n\}\}_L &= \{\{a, b_1\}\} \otimes b_2 \otimes \dots \otimes b_n, \\ \sigma_s(b_1 \otimes \dots \otimes b_n) &= b_{s^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes b_{s^{-1}(n)}\end{aligned}$$

则 A 上的一个“双泊松结构”(double Poisson structure) 是一个满足“双雅可比恒等式”(double Jacobi identity) 的双括号 $\{\{-,-\}\}$, 即对于任意的 $a, b, c \in A$,

$$\{\{a, \{\{b, c\}\}\}\}_L + \sigma_{(123)}\{\{b, \{\{c, a\}\}\}\}_L + \sigma_{(132)}\{\{c, \{\{a, b\}\}\}\}_L = 0$$

类似地, Van den Bergh 证明了以下定理:

定理 3 ([3] Proposition 7.5.2) 设 A 是一个结合代数。如果 A 上存在一个双泊松结构, 则 $\text{Rep}_n(A)$ 上存在一个自然的泊松结构。

Van den Bergh 的这个定理也非常好地符合了 Kontsevich-Rosenberg 原理, 它与 Crawley-Boevey 定理的区别是: 这两种非交换泊松结构诱导的泊松结构, 一个是定义在 $\text{Rep}_n(A)$ 上, 一个是定义在 $\text{Rep}_n(A)//\text{GL}(n)$ 上。

2.3 Crawley-Boevey, Etingof 和 Ginzburg 的双辛结构

在本小节, 我们讨论 Crawley-Boevey, Etingof 和 Ginzburg 在文 [4] 中提出的“双辛结构”(bi-symplectic structure)。

在此之前, 我们先回忆几个概念。设 (A, μ) 是一个带么元的结合代数。 $A \otimes A$ 具有自然的 A -双模结构: 对于任意的 $a_1, a_2, b, c \in A$,

$$b(a_1 \otimes a_2)c = ba_1 \otimes a_2c$$

因此 A 的乘法映射 $A \otimes A \xrightarrow{\mu} A$ 是一个 A -双模映射。现在考虑 μ 的核:

$$\Omega^1 A := \text{Ker}(\mu)$$

称为 A 上的“非交换 1-形式”, 我们有一个自然的导子 $d: A \rightarrow \Omega^1 A, a \mapsto a \otimes 1 - 1 \otimes a$, 使得对于任意的 A -双模 M ,

$$\text{Der}(A, M) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{A\text{-bimod}}(\Omega^1 A, M), \Theta \mapsto \{\tilde{z}_\Theta: \Omega^1 A \rightarrow M, xdy \mapsto x \cdot \Theta(y)\}$$

是一个同构, 且其逆映射为

$$\text{Hom}_{A\text{-bimod}}(\Omega^1 A, M) \ni f \mapsto f \circ d$$

特别地, 当 $M = A \otimes A$, $\text{Der}(A, A \otimes A)$ 也是一个 A 上的双模, 我们称之为 A 上的“非交换切向量场”。对于任意的 $\Theta \in \text{Der}(A, A \otimes A)$, 我们称对应的 A -双模映射

$$\tilde{z}_\Theta: \Omega^1 A \rightarrow A \otimes A, \alpha \mapsto \tilde{z}'_\Theta \alpha \otimes \tilde{z}''_\Theta \alpha$$

为缩并算子 (contraction operator)。

A 的“非交换微分形式”(noncommutative differential forms) 定义为由 $\Omega^1 A$ 在 A 上生成的自由的张量代数, 即

$$\Omega^\bullet A := T_A^*(\Omega^1 A)$$

通过莱布尼茨法则, 导子 d 诱导了 $\Omega^\bullet A$ 上的导子 d 。从而 $(\Omega^\bullet A, d)$ 是一个微分分次代数。然而, 对于带么元的结合代数 A , $(\Omega^\bullet A, d)$ 的同调却总是平凡的:

$$H^n(\Omega^\bullet A, d) = \begin{cases} k, & \text{若 } n = 0; \\ 0, & \text{若 } n \geq 1 \end{cases}$$

但是, A 的 Karoubi-de Rham 复形

$$DR^1 A := \Omega^1 A / [\Omega^1 A, \Omega^1 A]$$

有非平凡的同调群, 其上的微分由 $DR^1 A$ 上的微分 d 诱导而来。

注意到 $\Omega^1 A$ 是 $\Omega^1 A$ 在 A 上的张量代数, 因此缩并算子 $\tilde{z}_\Theta: \Omega^1 A \rightarrow A \otimes A$ 诱导了分次代数 $\Omega^1 A$ 的一个度数为 -1 的“双导子” \tilde{z}_Θ , 即 $\tilde{z}_\Theta \in \text{Der}(\Omega^1 A, \Omega^1 A \otimes \Omega^1 A)$ 。更确切地说, 任意给定 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Omega^1 A$, 我们有

$$\tilde{z}_\Theta(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n) = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k-1} (\alpha_1 \cdots \alpha_{k-1} (\tilde{z}'_\Theta \alpha_k)) \otimes ((\tilde{z}'_\Theta \alpha_k) \alpha_{k+1} \cdots \alpha_n)$$

下面, 我们令

$$\iota_\Theta := \mu \circ \tau \circ \tilde{z}_\Theta: \Omega^1(A) \rightarrow \Omega^{-1}(A)$$

其中 μ 是乘积, $\tau: a \otimes b \mapsto (-1)^{|a||b|} b \otimes a$ 是置换算子。特别地, 对于 $\omega \in \Omega^2 A$, 我们得到映射

$$\iota_{(-)} \omega: \text{Der}(A, A \otimes A) \rightarrow \Omega^1 A$$

容易看出, 这一映射仅仅依赖于 ω 在 $DR^2 A$ 中的等价类。

定义 4 (Crawley-Boevey-Etingof-Ginzburg) 设 A 是一个结合代数。 A 上的一个双辛结构 (bi-symplectic structure) 是指 A 的一个满足以下条件的闭 2-形式 $\omega \in DR^2 A$: 映射

$$\iota_{(-)} \omega: \text{Der}(A, A \otimes A) \rightarrow DR^1 A, \quad \Theta \mapsto \iota_\Theta \omega$$

是 A -双模同构。

Crawley-Boevey, Etingof 和 Ginzburg 证明了他们引进的该双辛结构也满足 Kontsevich-Rosenberg 原理:

定理 4 ([4] Theorem 11.3.1) 设 A 是一个结合代数。如果 A 上存在一个双辛结构, 则对于任意的自然数 n , $\text{Rep}_n(A)$ 上有一个辛结构。

2.4 以上三种非交换结构之间的关系

上面 3 小节介绍的三种非交换几何结构之间的关系是非常密切的。Van den Bergh 在文 [3] 中证明:

2.4.1 双泊松结构蕴含 H_0 -泊松结构

设 $(A, \{-, -\})$ 是一个双泊松结构。记 A 上的乘法为 μ , 并令

$$\{-, -\}: A \otimes A \rightarrow A, (a, b) \mapsto \mu \circ \{\{a, b\}\}$$

根据双泊松结构的定义, 固定 $\{-, -\}$ 中的一个元素, 则括号对另一元素相对于乘法都是一个导子。Van den Bergh 证明 (由计算可以直接得到): $\{-, -\}$ 可以下降到 $A_{\natural} := A/[A, A]$ 上成为其上的一个李括号。由此, 我们可以得到

$$\{-, -\}: A_{\natural} \times A_{\natural} \rightarrow A_{\natural}$$

是一个 H_0 -泊松结构。

2.4.2 双辛结构蕴含双泊松结构

设 (A, ω) 是一个双辛结构。则对于任意的 $a \in A$, 存在着对应的哈密顿向量场 $H_a \in \text{Der}(A, A \otimes A)$ 使得 $\iota_{H_a} \omega = da$ 。若令

$$\{\{a, b\}\}_\omega := H_a(b)$$

则 $\{\{-, -\}\}_\omega$ 是 A 上的一个双泊松结构; 证明见文 [3] 附录。

2.5 箭图代数的例

本小节, 我们给出箭图 (quiver) 代数的例子。设 $Q = (Q_0, Q_1)$ 是一个箭图, 其中 Q_0 是点集, Q_1 是边集。定义一个新的箭图 $\bar{Q} = (Q_0, \bar{Q}_1)$ (称为 Q 的“倍增”), 其中 $\bar{Q}_1 = \{e, e^*\}_{e \in Q_1}$, e^* 是一条方向与 e 相反的边。记由箭图 \bar{Q} 定义的路径代数 (path algebra) 为 P , 它是 kQ_0 上的一个自由代数。我们有:

(i) 记 $\text{pr}: P \rightarrow P_{\natural} = P/[P, P]$ 为投射映射。定义双线性映射

$$\{-, -\}: P_{\natural} \otimes P_{\natural} \rightarrow P_{\natural}, f \otimes g \mapsto \text{pr} \left(\sum_{e \in Q_1} \frac{\partial f}{\partial e} \frac{\partial g}{\partial e^*} - \frac{\partial f}{\partial e^*} \frac{\partial g}{\partial e} \right)$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial e}(a_1 \cdots a_n) = \sum_{a_r=e} a_{r+1} \cdots a_n a_1 \cdots a_{r-1}$$

则 $\{-, -\}$ 定义了 P 上的一个 H_0 -泊松结构 (见文 [2])。

(ii) 对于任意的 $f, g \in \overline{Q_1}$, 定义

$$\{\{f, g\}\} := \begin{cases} e_{t(f)} \otimes e_{s(g)}, & f \in Q_0, g = f^*; \\ -e_{s(f)} \otimes e_{t(g)}, & f = g^*, g \in Q_0; \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases}$$

其中 $t(-), s(-)$ 分别是相应的边的头和尾, 并利用导子的性质将其延拓到 P 上。我们有 $\{\{-, -\}\}$ 给出了 P 上的一个双泊松代数 [3]。

(iii) 记

$$\omega := \sum_{e \in Q_1} dede^*$$

则 (P, ω) 是一个双辛结构 [4]。

2.6 另一种非交换泊松结构

在 1990 年代, Block-Getzler [9] 和宾夕法尼亚州立大学的徐平教授 [10] 分别给出了另一种非交换泊松结构的定义。

定义 5 (徐平, Block-Getzler) 设 A 是一个结合代数。 A 上的一个“非交换泊松结构”是指 A 的一个 Hochschild 上同调 $\alpha \in \text{HH}^2(A)$ 满足

$$[\alpha, \alpha] = 0$$

如果我们记 $Z(A)$ 为 A 的中心, 则 $Z(A)$ 是 A 的一个交换的子代数; 反之, 我们可以把 A 看成交换代数的 $Z(A)$ 的非交换扩张。现在假设 α 是一个非交换泊松结构, 那么 α 诱导了 $Z(A)$ 上经典意义下的泊松结构 (见文 [10, Proposition 2.1])。在这个意义下, 定义 5 给出的非交换泊松结构也是泊松结构在结合代数范畴上的推广。这种非交换泊松结构曾被 Getzler 和唐翔等仔细研究过。

另一方面, 我们难以看到这种非交换泊松结构满足 Kontsevich-Rosenberg 原理。话又说回来, 注意到 Hochschild 上同调是结合代数的导出不变量, 因此这种非交换泊松结构可以在结合代数的同伦范畴下定义; 与此同时, Crawley-Boevey 的 H_0 -泊松结构也可以在结合代数的同伦范畴下考虑。我们可以看到, 在同伦范畴下, 这两个版本的非交换泊松结构, 实际上是统一的, 具有很好的函子性, 它们分别是导出意义下“多重切向量场”的 Maurer-Cartan 方程的解的一个分支。我们将另文做详细的讨论。

注记 2 在本小节, 我们详细地介绍了非交换几何而不是“导出代数几何”的几个例子。这样做的原因是: 我们首先要对经典的几何有充分的了解, 然后才能在导出代数几何中有迹可循而不致迷失。

3 表示概型与 Van den Bergh 函子

在本小节, 我们稍加详细地讨论表示概型上的几何结构。特别地, 我们讨论如何将一个结合代数上的非交换几何结构转化到它的表示概型上。

3.1 表示概型

设 k 是一特征为 0 的数域, A 是一个带幺元的 k -结合代数, V 是 k 上的线性空间。 A 在 V 上的一个表示是一个代数同态 $A \rightarrow \text{End}(V)$ 。 A 在 V 上的所有的表示构成的空间 $\text{Rep}_V(A)$ 是一个仿射概型。用函子的语言, 这一问题表述如下:

记 Alg 为所有带幺元的结合 k -代数所构成的范畴, CommAlg 为其中的交换结合代数所构成的子范畴。考虑下列函子

$$\text{Rep}_V(A): \text{CommAlg} \rightarrow \text{Sets}, \quad B \mapsto \text{Hom}_{\text{Alg}}(A, \text{End}(V) \otimes B) \quad (3)$$

其中 Sets 是所有集合构成的范畴。

命题 1 $\text{Rep}_V(A)$ 是可表的, 也就是说, 存在一个交换代数 A_V , 使得对任意的 B , 总有

$$\text{Hom}_{\text{CommAlg}}(A_V, B) \cong \text{Hom}_{\text{Alg}}(A, \text{End}(V) \otimes B) \quad (4)$$

该命题的证明可见参考文献 [11] 的 §4.1。我们称由 A_V 定义的概型为 A 在 V 上的表示概型 (representation scheme), 自然地记为 $\text{Rep}_V(A)$, 因此 A_V 又可以写成 $k[\text{Rep}_V(A)]$ 。

在 $\text{Rep}_V(A)$ 上, 存在一个自然的 $\text{GL}(V)$ 作用:

$$(g \circ \rho)(a) := g(\rho(a))g^{-1}, \quad \text{for } g \in \text{GL}(V), \rho \in \text{Rep}_V(A), a \in A$$

我们记 $\text{Rep}_V(A)^{\text{GL}(V)}$ 为对应的约化 $\text{Rep}_V(A)/\text{GL}(V)$ 。事实上, $\text{Rep}_V(A)^{\text{GL}(V)}$ 表示 A 在 V 上的所有表示的同构类。在文献中, 如果 $V = k^n$, 则 $\text{Rep}_V(A)$ 和 $\text{Rep}_V(A)^{\text{GL}(V)}$ 分别记为 $\text{Rep}_n(A)$ 和 $\text{Rep}_n(A)^{\text{GL}(n)}$ 。

一般地, $\text{Rep}_V(A)$ 和 $\text{Rep}_V(A)^{\text{GL}(V)}$ 都不是光滑的。为此, 我们先回顾一个定义:

定义 6 (Cuntz-Quillen [13]) 如果一个有限生成的结合代数 A 满足下列等价条件:

(i) 给定任意的 k 代数 R 及其幂零双边理想 N , 任意的同态 $\phi \in \text{Hom}_{\text{Alg}_k}(A, R/N)$, 总可以提升为一个同态 $\bar{\phi} \in \text{Hom}_{\text{Alg}_k}(A, R)$ 使得 $\bar{\phi}$ 是和自然投影 $R \rightarrow R/N$ 是交换的;

(ii) 对任意的 A 双模 M , 二阶 Hochschild 上同调 $\text{HH}^2(A; M) = 0$;

(iii) 记乘法 $\mu: A \otimes A \rightarrow A$ 的核为 $\Omega^1(A)$, 则 $\Omega^1(A)$ 是 A 的投影双模,

那么我们称 A 是“形式光滑”的 (formally smooth) 或“准自由”的 (quasi-free)。

例 1 下列代数是形式光滑的:

(i) 由 n 个变量生成的自由结合代数 $k\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$;

(ii) $\text{Mat}_n(k)$;

(iii) $k[X]$, 这里 X 是一个光滑仿射曲线;

(iv) 箭图生成的路径代数。

Ardizzoni, Galluzzi 和 Vaccarino 在文 [12] 中给出了 $\text{Rep}_V(A)$ 光滑的一个充分条件:

定理 5 ([12], Theorems 4.6-4.7) 若 A 是有限生成的形式光滑的 k 代数, 则 $\text{Rep}_V(A)$ 总是光滑的。

注意到形式光滑仅仅是一个代数的表示概型光滑的充分条件, 而非必要条件。一个例子是半单李代数的万有包络代数不是形式光滑的, 但其表示概型光滑的。文 [12] 给出了表示概型光滑的充要条件, 即:

定理 6 ([12], Theorem 3.3) 设 $f: k[\text{Rep}_V(A)] \rightarrow k$ 是 $\text{Rep}_V(A)$ 的一个点。则 f 是 $\text{Rep}_V(A)$ 的一个正则点当且仅当对应的二阶 Harrison 上同调

$$\text{Harr}^2(k[\text{Rep}_V(A)], \mathcal{J}_f) = 0$$

其中 \mathcal{J}_f 表示对应的 $k[\text{Rep}_V(A)]$ -模 \mathcal{J}_f 。

在上述定理中, 交换代数的 Harrison 上同调是平行于结合代数的 Hochschild 上同调的一个同调理论, 具体见 Harrison 的论文 [14]。换句话说, 对于一个代数 A , 其表示概型 $\text{Rep}_V(A)$ 光滑与否存在障碍, 而通常情况下, 这个障碍不是平凡的。

3.2 Van den Bergh 函子

弄清楚表示概型之后, 接下来的一个问题是: 如何把 A 上的结构关联到 $\text{Rep}_V(A)$ 上? Van den Bergh 在文 [15] 中给出了一个构造, 具体如下: 设 M 是一个 A -双模, 则

$$M_V := M \otimes_A (\text{End} V \otimes A_V)$$

是一个 A_V -模。这样, 我们就得到了从 A 的双模范畴到 A_V 模范畴的一个函子

$$(-)_V: \text{Bimod}(A) \rightarrow \text{Mod}(A_V), \quad M \mapsto M_V \tag{5}$$

注意到交换代数的模范畴与其对应的仿射概型上的拟凝聚层范畴是等价的, Van den Bergh 的函子实际上也给出了从 A 的双模范畴到其表示概型的拟凝聚层范畴的一个函子。

在这个函子下, 我们可以将 A 上的非交换切向量、非交换微分形式等 (见 §2.3) 关联到其表示概型上的切向量场、微分形式等等。作为推论, 我们重复定理 3 和定理 4:

定理 7 [3-4] 设 A 是一个结合代数, V 是任意的一个线性空间。我们有:

(i) 设 $\{-, -\}$ 是 A 上的双泊松结构, 则 $\text{Rep}_V(A)$ 上存在一个泊松结构;

(ii) 设 $\omega \in \text{DR}^2 A$ 是 A 上的双辛结构, 则 $\text{Rep}_V(A)$ 上存在一个辛结构。

至此,我们在 Kontsevich–Rosenberg 原理的指导下,介绍了非交换泊松结构和非交换辛结构的构造。这是非交换几何的重要结果之一。当然,正如我们前面的所说的,除了箭图的例子之外,我们实际上是很难找到更多的例子了。注意到箭图的路径代数实际上是一个自由代数,同时注意到任何代数都存在一个自由的预解,那么我们有十足的动机作如下的考虑:我们是否可以在同伦的意义下考虑表示概型,并且在同伦的意义下考虑非交换的泊松结构和辛结构?这是我们下面要讨论的内容。

4 导出表示概型

在本小节,我们介绍 Berest 等引进的导出表示概型的概念,讨论它们的切空间、余切空间等性质。

首先注意到:设 A 是一个结合代数,固定线性空间 V ,则 A 在 V 上的表示概型给出了一个函子

$$(-)_V: \text{Alg} \rightarrow \text{CommAlg}, \quad A \mapsto A_V$$

我们称该函子为 V 上的表示函子。事实上,表示函子可以扩展到微分分次代数上:对于任意给定的一个微分分次向量空间 V ,存在着一个函子

$$(-)_V: \text{DGA} \rightarrow \text{CDGA}, \quad A \mapsto A_V = k[\text{Rep}_V(A)] \quad (6)$$

使得

$$\text{Hom}_{\text{DGA}}(A, \text{End}(V) \otimes B) \cong \text{Hom}_{\text{CDGA}}(A_V, B)$$

根据前面提到的 Quillen 的有理同伦论, DGA 和 CDGA 这两个范畴都具有“模型范畴结构”,因此都存在相应的同伦范畴,即这两个范畴在拟同构下的局部化,记为 $\text{Ho}(\text{DGA})$ 和 $\text{Ho}(\text{CDGA})$ 。这两个范畴中的对象,都存在着“准自由”的逼近(见 §3),也就是说对任意一对象 (A, d) ,其中 d 是微分,存在代数的拟同构

$$(QA, d) \simeq (A, d)$$

并且 QA 是准自由的,这些 QA 称为余纤维化分解 (cofibrant resolution)。对于函子 (6),可以证明,它能够提升到相应的同伦范畴上。这就是 Berest, Khachatryan 和 Ramadoss 在文献 [5] 中证明的一个重要的结果:

定理 8 ([5] Theorem 2.2) 函子 (6) 具有左导出函子 (left derived functor):

$$\mathbb{L}(-)_V: \text{Ho}(\text{DGA}) \rightarrow \text{Ho}(\text{CDGA}), \quad A \mapsto (QA)_V$$

而且,对任意的 $A \in \text{DGA}$ 和 $B \in \text{CDGA}$,存在着典范同构

$$\text{Hom}_{\text{Ho}(\text{CDGA})}(\mathbb{L}(A)_V, B) \cong \text{Hom}_{\text{Ho}(\text{DGA})}(A, \text{End}(V) \otimes B)$$

定义 7 我们称函子

$$\text{DRep}_V(-): = \mathbb{L}(-)_V: \text{Ho}(\text{DGA}) \rightarrow \text{Ho}(\text{CDGA}), \quad A \mapsto (QA)_V$$

为“导出表示函子”(derived representation functor),并称 $\text{DRep}_V(A)$ 为 A 在 V 上的“导出表示概型”(derived representation scheme),称其同调 $H.(\text{DRep}_V(A))$ 为 A 在 V 上的“表示同调”(representation homology)。

对结合代数导出表示概型的研究揭示了该代数很多隐秘的信息,比如循环同调群、Hochschild 同调群以及 Hochschild 上同调群等等,都自然而然地出现了。接下来,我们介绍导出表示概型的“函数空间”、“切空间”和“余切空间”,并将它们与上述概念联系起来。

4.1 导出迹映射和循环同调

回忆 §2.1 中,对任意的代数 $A \in \text{Alg}$,任意的向量空间 V ,存在着一个迹映射

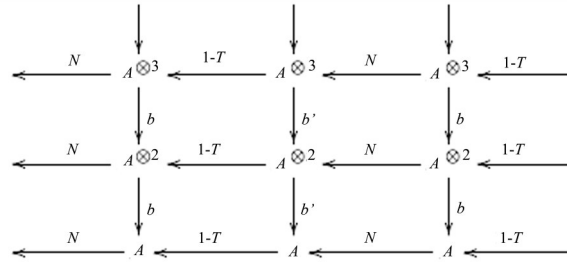
$$A \rightarrow k[\text{Rep}_V(A)], \quad a \mapsto \{\text{Rep}_V(A) \ni \rho \mapsto \text{trace}(\rho(a))\}$$

注意到这个迹映射通过 (factor through) $A_{\natural} := A/[A, A]$,并且像总是 $\text{GL}(V)$ 不变的,因此一般把这个迹映射写成

$$\text{Tr}: A_{\natural} \rightarrow k[\text{Rep}_V(A)]^{\text{GL}(V)}$$

我们也称 A_{\natural} 为 A 上的函数,即迹映射把函数映到函数。

参考文献 [5] 的另一个重要结论说迹映射存在着一个导出版本。为了说明该结论, 我们首先回忆一下结合代数的循环复形 (cyclic complex) 的概念。代数 A 的循环复形 $CC_*(A)$ 是下图中 $1-T$ 的余核构成的复形 (这部分内容可以参考 Loday 的书 [16]):



其中

$$\begin{aligned}
 b'(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= \sum (-1)^i a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n, \\
 b(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= b'(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) + (-1)^n a_n a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}, \\
 T(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= (-1)^{n-1} (a_n \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}), \\
 N(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= (1 + T + \cdots + T^{n-1})(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)
 \end{aligned}$$

其同调群称为 A 的循环同调群, 记为 $HC_*(A)$ 。在上图中, b -复形称为 A 的 Hochschild 链复形, 记为 $CH_*(A)$, 其同调群称为 A 的 Hochschild 同调群, 记为 $HH_*(A)$ 。若代数 A 是增广的 (augmented), 则我们有如下分解

$$CC_*(A) \cong CC_*(k) \oplus \overline{CC}_*(A) \tag{8}$$

其中 $\overline{CC}_*(A)$ 被称为 A 的约化循环复形 (reduced cyclic complex)。Feigin 和 Tsygan 在文 [17] 的一个著名结论说约化循环复形可以按如下方法计算:

引理 1 (Feigin-Tsygan [14], Theorem 1) 设 $R \rightrightarrows A$ 是 A 的一个余纤维化预解, 则我们有链复形的拟同构

$$\overline{CC}_*(A) \simeq \overline{R}_\natural := R / (k \cdot 1 + [R, R]) \tag{9}$$

参考文献 [5] 的 Proposition 4.2 给出了该结论一个新的范畴化的证明。因为 $CC_*(A) \rightarrow \overline{CC}_*(A)$ 是分裂的, 满的, 且 $R_\natural = \overline{R}_\natural + k$, 所以存在一个满映射

$$CC_*(A) \rightarrow R_\natural$$

结合式 (7) ~ (9), 我们可以得到如下结论:

定理 9 ([5] Proposition 4.1) 设 A 是一个微分分次代数, 则存在一个自然映射, 称为“导出迹映射” (derived trace map)

$$\text{Tr}: CC_*(A) \rightarrow \text{DRep}_V(A)^{\text{GL}(V)}$$

使得该映射的像生成的函数在每一个分次上 (degree-wise) 是满的。

换句话说, 对于一个结合代数 A , 它的“导出函数”是其循环链复形, 并且在导出意义下, 我们有迹映射把导出的函数映到其导出表示概型上的函数。

4.2 切向量场与余切向量场

类似地, 我们可以考虑导出意义下的“非交换切向量场”和“余切向量场”。这些概念完全平行于 §2.3, 因此我们只是简略地提一下, 具体内容请参考文献 [5-6, 18, 20]。

设结合代数 A 的一个余纤维化分解为 QA , 我们称 $\text{Der}(QA, QA \otimes QA)$ 和 $\Omega^1(QA)$ 为 A 的导出意义下的“非交换切向量场”和“非交换余切向量场”; 在 Van den Bergh 函子下, 它们分别映到 A 的导出表示概型 $\text{DRep}_n(A)$ 上的切向量场和余切向量场。

此外, $\Omega^1(QA)$ 和 $\text{Der}(QA, QA \otimes QA)$, 作为 QA 双模, 对应的交换子商空间, $\Omega^1(QA)_\natural$ 和 $\text{Der}(QA, QA \otimes QA)_\natural$ 分别对应于 A 的 Hochschild 链复形 $CH_*(A)$ 和上链复形 $CH^*(A)$, 从而我们有导出的迹

映射:

$$\mathrm{Tr}: \mathrm{CH}_*(A) \rightarrow \Omega^1(\mathrm{DRep}_n(A)^{\mathrm{GL}(V)}), \quad \mathrm{CH}^*(A) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathrm{DRep}_n(A)^{\mathrm{GL}(V)}) \quad (11)$$

其中 $\Omega^1(-)$ 和 $\mathfrak{X}(-)$ 分别表示相应空间上的微分 1-形式 (余切向量场) 和切向量场。

4.3 导出非交换泊松结构和辛结构

有了上述这些背景, 我们介绍导出的非交换泊松结构和非交换辛结构就非常容易了。

定义 8 ^[18] (导出非交换泊松结构) 设 A 是微分分次代数。一个 A 上的度数为 n 的“导出非交换泊松结构” (derived non-commutative Poisson structure) 是 A 的一个余纤维化预解 QA 上的度数为 n 的微分分次 H_0 -泊松结构, 即 $(QA)_\natural$ 是一个度数为 n 的微分分次李代数使得对任意的 $\bar{a} \in (QA)_\natural$

$$[\bar{a}, -]: (QA)_\natural \rightarrow (QA)_\natural$$

总是由代数 QA 的一个与微分交换的导子 $d_a: QA \rightarrow QA$ 诱导而来的。

在文献上, 度数为 n 的泊松结构, 也称为 n -次“平移泊松结构” (见 Calaque 等的论文 ^[19])。导出非交换 Poisson 括号在同伦意义下是不依赖于分解 QA 的选择的, 因此在微分分次代数的同伦范畴上是良定义的。下列结果为文献 [18] 所证明:

定理 10 ([18] Theorem 2) 设 A 是微分分次代数, 且具有一个度数为 n 的导出非交换泊松结构。则对任意的向量空间 V , A 的导出同调 $H_*(\mathrm{DRep}_V(A)^{\mathrm{GL}(V)})$ 上存在唯一的度数为 n 的分次泊松代数结构使得导出迹映射是一个分次李代数同态。

当然, 我们也可以讨论导出意义下 Van den Bergh 的双泊松结构以及 $\mathrm{DRep}_V(A)$ 上的泊松结构, 在此不再赘述。类似地, 我们有:

定义 9 ^[21] (导出非交换辛结构) 设 A 是微分分次代数。 A 上的度数为 n 的“导出非交换 n -次平移辛结构” (derived non-commutative n -shifted symplectic structure) 是 A 的一个余纤维化预解 QA 上的度数为 n 的闭的、非退化的 $(2-n)$ -形式 $\omega \in \mathrm{DR}^2(QA)$ 。

在这里, 注意到 $\mathrm{DR}^*(QA)$ 实际上有两个微分, 一个是 de Rham 微分, 一个是从 QA 上遗传来的微分, 因此“闭”在这里的意思是: 在 $\mathrm{DR}^*(QA)$ 对应的负循环链复形 (negative cyclic complex) 中是闭的。我们有如下定理:

定理 11 ([21] Theorem 5.7) 设 A 是微分分次代数, 且具有一个导出非交换 n -次平移辛结构。则对任意的向量空间 V , $\mathrm{DRep}_V(A)$ 上存在 n -次平移辛结构。

在这个定理中, 平移辛结构的概念是 Pantev 等在文 [22] 中首次提出的; 定义 9 中给出的可以看成是该概念的非交换版本。前面提到的文献 [19] 是该论文的后续。

注记 3 在本小节, 我们实际上模糊处理了 $\mathrm{DRep}_V(A)$ 和 $\mathrm{DRep}_V(A)^{\mathrm{GL}(V)}$ 的区别。在介绍非交换泊松结构的时候, 因为 Van den Bergh 的双泊松结构自然给出了 Crawley-Boevey 的 H_0 -泊松结构, 所以前者不仅给出了 $\mathrm{DRep}_V(A)$ 上的泊松结构, 也给出了 $\mathrm{DRep}_V(A)^{\mathrm{GL}(V)}$ 上的泊松结构。在研究非交换辛结构的时候, $\mathrm{DRep}_V(A)$ 和 $\mathrm{DRep}_V(A)^{\mathrm{GL}(V)}$ 上的切向量场与余切向量场是有区别的, 因此前者上的辛结构并不能给出后者上的辛结构, 反之亦是如此。尽管如此, 通过对非交换的切向量场和余切向量场的定义稍加改动 (具体讨论可见文 [21, 23], 并参见定理 16), 我们可以分别得到 $\mathrm{DRep}_V(A)^{\mathrm{GL}(V)}$ 上的辛结构。为了得到 $\mathrm{DRep}_V(A)^{\mathrm{GL}(V)}$ 上的辛结构的例子, 我们接下来讨论卡拉比-丘代数。

5 卡拉比-丘代数

2007 年, Ginzburg 在 arXiv 论文预印本网站发表了论文 ^[24]。在文中, 他首次引入了“卡拉比-丘代数”的概念。这一概念不仅总结了前人 (例如 Kontsevich 等) 在此领域的结果, 而且开辟了很多新的研究方向, 引起了很多数学家的关注与研究。

定义 10 (Ginzburg) 假设 A 是一个特征为 0 的数域 k 上的结合代数。我们称 A 是一个 n 维的“卡拉比-丘代数”, 如果它满足以下两个条件:

(i) A 是同调光滑的 (homologically smooth), 也就是说, 作为 A^e -模, A 存在一个有限长度的、并且是

有限生成的投射预解;

(ii) 作为 A^c -模范畴的导出范畴中的对象, 存在同构

$$\mathrm{RHom}_{A^c}(A, A \otimes A) = A[n] \quad (12)$$

注记4 (i) 在上述定义中, 如果 A 是交换的, 则: 条件 (i) 等价于说, A 对应的仿射概型, 也即素谱 $\mathrm{Spec} A$ 是光滑的 (这是 Serre 的一个结果); 条件 (ii) 等价于说, $\mathrm{Spec} A$ 的典则层 (canonical sheaf) 是平凡的。由此, 我们得到: 对于一个交换代数 A , 它是一个卡拉比-丘代数当且仅当 $\mathrm{Spec} A$ 是一个卡拉比-丘概型。对于同构 (12), Van den Bergh 后来证明: 在相差一个内自同构的意义下, 该同构是唯一的。

(ii) 卡拉比-丘代数与文献中的 Artin-Schelter 正则代数关系非常密切。实际上, 如果我们在同构 (12) 中, 只要求同构既是左 A -模同构, 又是右 A -模同构, 但是不一定是双模同构, 则在此情形下, 该代数就是一个 Artin-Schelter 正则代数。换句话说, 卡拉比-丘代数是 Artin-Schelter 正则代数的特殊情形, 反过来, Artin-Schelter 正则代数也称为“扭曲”的 (twisted) 卡拉比-丘代数 (具体内容见 Reyes 等的论文^[25])。

下面我们给出卡拉比-丘代数的几个例子 (以下代数有时候不限定基域是 k)。

例2 (包络代数) 假设 \mathfrak{g} 是一个有限维的李代数。我们称 \mathfrak{g} 是幺模的 (unimodular), 如果任意 $a \in \mathfrak{g}$ 的共轭作用

$$\mathrm{ad}_a(-) = [a, -]: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

的迹总是 0。有限维半单李代数、Abelian 李代数、紧李群的李代数等等, 都是幺模的, 它们的万有包络代数是卡拉比-丘代数。特别地, 多项式代数是卡拉比-丘代数 (因为它们是 Abel 李代数的万有包络代数)。

例3 (非交换无差异消解) 设 Γ 是 $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ 的一个有限子群, 通过 $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ 作用在 \mathbb{C}^3 上。考虑奇点 \mathbb{C}^3/Γ , Bridgeland 等^[26] 证明: \mathbb{C}^3/Γ 存在一个光滑的消解 $\widetilde{\mathbb{C}^3/\Gamma}$, 并且后者是一个局部卡拉比-丘流形。Van den Bergh^[27] 证明:

$$D(\widetilde{\mathbb{C}^3/\Gamma}) \cong D(\mathbb{C}[x, y, z] \rtimes \Gamma)$$

并且称 $\mathbb{C}[x, y, z] \rtimes \Gamma$ 为 \mathbb{C}^3/Γ 的“非交换无差异消解” (noncommutative crepant resolution, 简称 NCCR)。在一般情况下, 一个奇点的非交换无差异消解, 如果存在的话, 都是卡拉比-丘代数。

例4 (Ginzburg 代数) Ginzburg 在文 [24] 中用箭图构造了一类微分分次代数 (现在人们称为 Ginzburg 代数), 并猜测: 这类代数是卡拉比-丘代数。这一猜测后来被 Keller 和 Van den Bergh 证明 (见文 [28])。

Broomhead 证明, 任意一个 3-维仿射、Gorenstein 孤立奇点, 都存在非交换的无差异消解; 该无差异消解是一个 3 维 Ginzburg 代数^[29]。

例5 (基本群的群代数) 一个流形 M 称为“无球” (aspherical) 的, 如果它的万有复叠空间是可缩的。对于一个无球闭流形, 它的基本群的群代数是一个卡拉比-丘代数。在文 [24] 中, Ginzburg 曾经猜测, 3 维无球闭流形的基本群的群代数, 作为一个卡拉比-丘代数, 是由一个非交换势函数给出的 Jacobi 代数。这一猜测后来被 Davison 否定^[30]。

5.1 从卡拉比-丘代数到卡拉比-丘范畴

在 1990 年代初, 日本数学家 Fukaya (深谷贤治) 在研究辛流形上相交型 Floer 同调群的时候, 发现了辛流形的 Lagrange 子流形组成一个特殊的结构, 他称之为 A_∞ 范畴。简单地说, 一个 A_∞ 范畴不是一个范畴, 而是在相差一个“同伦”的意义下形成一个范畴, 而这些同伦之间又存在同伦, 以及同伦的同伦等等, 一直至于无穷。这一结构, 现在称为 Fukaya 范畴, 可以说是 Stasheff 在 1960 年代发现的流形的闭路空间上的 A_∞ 结构的范畴化版本。

在 1994 年的世界数学家大会上, 在数学界崭露头角的 Kontsevich 提出了著名的“同调镜像对称猜测” (Homological Mirror Symmetry Conjecture) 指出: 对于一个卡拉比-丘流形, 存在另一个卡拉比-丘流形, 称为前者的“镜像”, 使得前者的 Fukaya 范畴与后者的凝聚层范畴导出等价, 前者的凝聚层范畴与后者的 Fukaya 范畴导出等价 (见文 [31])。同调镜像对称猜测可以说是近二十多年来数学物理领域最重要的猜测, 获得了人们广泛的研究, 并取得了丰硕的成果。

Kontsevich 还指出, 这两个范畴都是一类“非交换的辛空间”, 后来 Costello^[32] 等称之为卡拉比-丘范畴, 并且证明一个卡拉比-丘范畴等价于一个“开”的拓扑共形场论 (topological conformal field theory, 简称 TCFT)。下面, 我们对这一重要概念稍微详细地加以介绍 (更详细的内容可见文 [32])。

定义 11 (A_∞ 范畴) 一个 A_∞ 范畴 \mathcal{A} 是由对象集合 $\text{Ob}(\mathcal{A})$, 及对任意的对象 $A_1, A_2 \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ 对应的 k 上的分次线性空间 $\text{Hom}(A_1, A_2)$ 构成的, 并且对所有 $n = 1, 2, \dots$, 都存在着度数为 $|m_n| = 2 - n$ 的多重线性映射:

$$m_n: \text{Hom}(A_n, A_{n+1}) \otimes \cdots \otimes \text{Hom}(A_2, A_3) \otimes \text{Hom}(A_1, A_2) \rightarrow \text{Hom}(A_1, A_{n+1})$$

且满足下列 A_∞ 关系:

$$\sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^{n-p+1} (-1)^{\mu_{p,k}} m_{n-k+1}(a_n, \dots, a_{p+k}, m_k(a_{p+k-1}, \dots, a_p), a_{p-1}, \dots, a_1) = 0 \quad (13)$$

其中 $a_i \in \text{Hom}(A_i, A_{i+1})$, $\mu_{p,k} = d \sum_{r=1}^{p-1} |a_r| - (p-1)$ 。

定义 12 (卡拉比-丘 A_∞ 范畴) 设 \mathcal{A} 是一个 A_∞ 范畴。若存在一个对称的非退化配对

$$\langle -, - \rangle: \text{Hom}(A_2, A_1) \otimes \text{Hom}(A_1, A_2) \rightarrow k[d]$$

使得该形式是循环不变的, 即

$$\langle m_{n-1}(a_{n-1} \otimes \cdots \otimes a_1), a_n \rangle = (-1)^{n-1 + \sum_{i=1}^{n-1} |a_i|} \langle m_{n-1}(a_n \otimes \cdots \otimes a_2), a_1 \rangle \quad (14)$$

则我们称 \mathcal{A} 是一个 d 维的“卡拉比-丘 A_∞ 范畴”。

在文献中, 有时候也把上述范畴的同伦范畴称为卡拉比-丘范畴而不加以区分; 在文 [33] 中, 作者们也称之为非交换的卡拉比-丘空间。

例 6 (凝聚层范畴) 设 X 是一个 d 维卡拉比-丘流形, 则 X 上的有界凝聚层范畴 $D(X)$ 是一个 d 维的卡拉比-丘范畴。

在本例中, m_1 是相应的态射空间上的微分, m_2 是态射的复合, 而 m_3 及后面的 m_n 都是 0; 相应的配对则由 Serre 对偶给出。具体证明可以参见 Huybrechts^[34] 的书第三章。

例 7 (Fukaya 范畴) 设 M 是一个辛流形。直观地说, 辛流形 M 的 Fukaya 范畴 $\text{Fuk}(M)$ 定义如下: 其对象为 M 中的 Lagrange 子流形, 对任意两个横截相交的对象 L_1 和 L_2 , 其态射空间 $\text{Hom}(L_1, L_2)$ 定义为对应的 Floer 上链复形, 即由所有 L_1 和 L_2 的横截相交点张成的空间, 并且对任意的 $n+1$ 个 Lagrange 子流形 L_1, \dots, L_{n+1} , 多重线性映射

$$m_n: \text{Hom}(L_n, L_{n+1}) \otimes \cdots \otimes \text{Hom}(L_2, L_3) \otimes \text{Hom}(L_1, L_2) \rightarrow \text{Hom}(L_1, L_{n+1})$$

的定义是通过计数边界落在 L_1, \dots, L_{n+1} 的拟全纯圆盘的个数而得到。Fukaya 和 Seidel 等证明: 如果 M 的条件充分好 (例如第一陈类为 0), 则 $\text{Fuk}(M)$ 是一个卡拉比-丘范畴, 其中的配对由流形的 Poincaré 对偶给出。

这一结论中 A_∞ 范畴结构 (13) 的证明, 可以参考 Fukaya 等^[35] 的专著以及 Seidel^[36] 的专著, 而其中非退化配对 (14) 的存在性在 Seidel 的书中亦有证明。后来 Fukaya 告诉本文作者, 对于一般的辛流形, 这一结论也是成立的。

关于卡拉比-丘代数和卡拉比-丘范畴的关系, 我们有如下定理 (其证明见文 [37]):

定理 12 设 A 是一个卡拉比-丘代数, 则 A 的有限维微分分次模组成的范畴的导出范畴是一个卡拉比-丘范畴。

因为这个密切的关系, 有些文献中也把满足定义 10 中两个条件的范畴称为卡拉比-丘范畴 (例如文献 [38])。

5.2 卡拉比-丘范畴与非交换几何

如前所述, Kontsevich 等认为 (具体可见文 [31, 33]), 卡拉比-丘范畴实际上等价于非交换的辛空间。直到现在, 人们还在发掘这一论断背后的几何意义。例如, Pantev 等证明:

定理 13 ([22] Theorem 0.1) 设 X 是一个卡拉比-丘射影流形。则 X 上的凝聚层的导出范畴的模空间

上存在一个平移辛结构。

关于 Fukaya 范畴上的非交换几何理论, 这方面的研究近年来有增多的趋势。前面提到的 Seidel 及其学生 Abouzaid、Sheridan, 以及 Lekili 等都做出很重要的工作。对于其中的非交换 Poisson 结构, 试举一例:

定理 14 ([39] Theorem 17) 设 M 是一个 $2d$ 维的恰当辛流形且满足 $c_1(M) = 0$ 。则 M 的 Fukaya 范畴 $\text{Fuk}(M)$ 上具有一个度数为 $2-d$ 的微分分次双泊松结构。

6 卡拉比-丘代数的导出表示概型

在本小节, 我们讨论卡拉比-丘代数的导出表示概型, 并讨论其上的非交换泊松结构和辛结构。为了表述的方便, 我们假设这些代数都是 Koszul 的。事实上, 我们遇到的大部分卡拉比-丘代数都是 (某种意义上) Koszul 的。

6.1 Koszul 对偶

我们从 Koszul 代数的定义开始。设 V 是数域 k 上的一个有限维向量空间, R 是 $V^{\otimes 2}$ 的子空间。我们记 V 的张量代数数为 $T(V)$, 并记 R 生成的双边理想为 $\langle R \rangle$ 。我们称对应的商代数

$$A := T(V) / \langle R \rangle$$

为一个“二次代数” (quadratic algebra), 并记为 $A := A(V, R)$ 。对偶地, 我们称二次代数

$$A^! := T(s^{-1}V^*) / \langle s^{-2}R^\perp \rangle$$

为 A 的“二次对偶代数” (quadratic dual algebra), 其中 V^* 是向量空间 V 的对偶空间, $R^\perp \subset (V^*)^{\otimes 2}$ 是 R 在 $(V^*)^{\otimes 2}$ 中的正交补, s 是平移算子, 同时我们称 $A^! := (A^!)^* \subset TV$ 为 A 的二次对偶余代数 (quadratic dual coalgebra)。我们赋予余代数 $A^!$ 以经典分次, 在这种情况下 $A^!_0 = k$, $A^!_1 = sV$, 而对 $n \geq 2$ 有

$$A^!_n = \bigcap_{p+q=n-2} (sV)^{\otimes p} \otimes R \otimes (sV)^{\otimes q}$$

现在我们选取 V 的一组基 $\{e_i\}$, 设 $\{e_i^*\}$ 为其对偶基。定义 $A \otimes A^!$ 上的运算 $d := e_i \otimes s^{-1}e_i^*$ 如下:

$$d(r \otimes f) := \sum e_i r \otimes s^{-1}e_i^* f$$

则我们有 $d^2 = 0$ 。由此我们得到一个链复形 $(A \otimes A^!, d)$, 我们称该链复形为二次代数 A 的 Koszul 复形。

定义 13 (Koszul 代数) 我们称一个二次代数 A 为“Koszul 代数”, 如果其 Koszul 复形

$$\cdots \xrightarrow{d} A \otimes A^!_m \xrightarrow{d} A \otimes A^!_{m-1} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} A \otimes A^!_0$$

是 A -模 k 的一个分解。

注记 5 这里给出的是狭义的 Koszul 代数的定义。更一般地, 卢涤明等^[40]给出了广义的 Koszul 代数的定义。本文中关于 Koszul 的卡拉比-丘代数的结论在广义的 Koszul 意义下也成立。

关于 Koszul 代数, 我们有如下定理:

定理 15 设 A 是一个 Koszul 代数, 记 $A^!$ 为它的 Koszul 对偶余代数, $\Omega(A^!)$ 为 $A^!$ 的“栏”构造 (bar construction)。则我们有自然的映射

$$\Omega(A^!) \rightarrow A$$

使之成为拟同构。换句话说, $\Omega(A^!)$ 是 A 的一个余纤维化预解。

利用这个定理, 我们能非常方便地给出 A 的导出意义下的非交换切向量场和余切向量场 (在这里我们利用了杨伟杰^[23]的一个观察, 这个观察与本文部分作者在文 [21] 得到的结论是一致的):

定理 16^[21, 23] 设 A 是一个 Koszul 代数。则 A 的导出意义下的非交换切向量场和余切向量场 (非交换微分 1-形式) 分别为

$$\Omega(A^!) \otimes A^! \otimes \Omega(A^!) \text{ 和 } \Omega(A^!) \otimes A^! \otimes \Omega(A^!)$$

6.2 非交换泊松结构和辛结构

下面我们考虑 Koszul 的卡拉比-丘代数。这类代数有一个非常好的性质, 这是由 Van den Bergh 给出的:

定理 17 ([41] Theorem 11.1) 设 A 是一个 Koszul 代数, 则 A 是一个 n 维卡拉比-丘代数当且仅当它的

Koszul 对偶 $A^!$ 是一个对称的 Frobenius 代数, 即存在 $A^!$ -双模同构

$$A^! \rightarrow A^![n]$$

根据双辛结构的定义, 结合定理 16 和定理 17, 我们立即得到:

定理 18 ^[21, 23] 设 A 是一个 Koszul 的 n 维卡拉比-丘代数. 则 A 上存在一个导出意义下的非交换的双辛结构, 该双辛结构诱导了 $\mathrm{DRep}_V(A)^{\mathrm{GL}(V)}$ 上的 $(2-n)$ 次平移辛结构.

回忆 §2.4 中关于非交换辛结构与非交换泊松结构的关系, 定理 18 有如下推论:

推论 1 ^[18, 20, 42, 44] 设 A 是一个 Koszul 的 n 维卡拉比-丘代数. 则 A 上存在一个导出意义下的非交换的双泊松结构, 该双泊松结构诱导了 $\mathrm{DRep}_V(A)^{\mathrm{GL}(V)}$ 上的 $(2-n)$ 次平移泊松结构.

6.3 应用

通过学习非交换泊松结构, 我们得到了结合代数的一些以前不知道的结构. 在本文的最后, 我们讲述几个这样的例子.

首先回忆在微分几何中, 设 (M, π) 是一个泊松流形, 则 M 上的微分形式空间 $\Omega^1(M)$ 是泊松代数 $C^\infty(M)$ 的一个李模:

$$(f, \omega) \mapsto L_{X_f} \omega$$

其中 $f \in C^\infty(M)$, $\omega \in \Omega^1(M)$, X_f 是函数 f 的汉密尔顿向量场. 同时, de Rham 微分

$$d: C^\infty(M) \rightarrow \Omega^1(M)$$

是泊松代数 $C^\infty(M)$ 的李模同态.

在导出泊松几何中, 我们也有类似的结论. 回忆前面 §4.1~4.2 所述, 代数 A 的循环同调 $\mathrm{HC}_\bullet(A)$ 可以认为是 A 的导出意义下的函数, 而 A 的 Hochschild 同调 $\mathrm{HH}_{\bullet+1}(A)$ 与 A 的导出意义下的微分 1-形式关系密切 (见式 (11)), Connes 循环算子 B 则类似于 de Rham 微分. 本文部分作者和杨松在文 [20] 中证明:

定理 19 ([20] Theorems 1.1-1.2) 设 A 是一个 n 维的 Koszul 卡拉比-丘代数. 则:

(i) A 上存在着一个度数为 $2-n$ 的导出泊松代数结构, 且该导出泊松结构诱导了 A 的循环同调 $\mathrm{HC}_\bullet(A)$ 上的一个度数为 $2-n$ 的分次李代数结构;

(ii) $\mathrm{HH}_\bullet(A)$ 上具有一个度数为 $2-n$ 的 $\mathrm{HC}_\bullet(A)$ -李模结构, 并且正合序列

$$\cdots \xrightarrow{B} \mathrm{HH}_\bullet(A) \xrightarrow{I} \mathrm{HC}_\bullet(A) \xrightarrow{S} \mathrm{HC}_{\bullet-2}(A) \xrightarrow{B} \mathrm{HH}_{\bullet-1}(A) \xrightarrow{I} \cdots$$

是度数为 $2-n$ 的 $\mathrm{HC}_\bullet(A)$ 的李模映射.

关于定理中长短正合列的具体内容, 请参考 Loday 的书 ^[16]. 在同一文章中, 我们还给出如下论断, 后来被 Ramadoss 和张忆宁证明:

定理 20 ([44] Theorem 4.2) 设 A 是一个 n 维的 Koszul 卡拉比-丘代数. 我们有李模映射的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{HC}_\bullet(A) & \xrightarrow{B} & \mathrm{HH}_{\bullet+1}(A) \\ \mathrm{Tr} \downarrow & & \downarrow \mathrm{Tr} \\ \mathrm{H}_\bullet(\mathrm{DRep}_V(A)^{\mathrm{GL}(V)}) & \xrightarrow{d} & \mathrm{H}_\bullet(\Omega^1(\mathrm{DRep}_V(A)^{\mathrm{GL}(V)})) \end{array}$$

关于导出非交换泊松结构的其他应用, 如在弦拓扑、表示论和导出代数几何等领域的应用, 可参见文献 [42-43] 等. 最后, 我们提两个有趣的问题, 与大家一起探讨:

问题 1 在 §1.5 小节, 我们将卡拉比-丘流形上凝聚层范畴的 Serre 对偶定理解释成其模空间上的平移辛结构. 对于一般的 n 维射影流形, 我们仍然有 Serre 对偶定理

$$\mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{D(X)}(\mathcal{F}, S(\mathcal{E})[n])^*$$

其中 S 是 Serre 函子. 我们的问题是: 这个一般情形的定理给出了流形凝聚层范畴的模空间上的什么结构?

问题 2 在本文中, 我们主要考虑了结合代数在线性空间上的表示及其导出情形. 在代数几何中, 我

们还可以考虑代数簇的 Hilbert 概型和 Quot 概型, 这些函子也都存在导出的版本。一个自然的问题是: 对于结合代数, 是否存在导出的非交换 Hilbert 概型和 Quot 概型? 如果存在, 如何刻画它们?

致谢 本文的撰写得到中山大学胡建勋教授的支持与鼓励, 并得到杨松、杨向东的协助, 作者们向以上诸位表示诚挚的谢意。

参考文献:

- [1] KONTSEVICH M, ROSENBERG A. Noncommutative smooth spaces [C]//Gelfand Mathematical Seminars 2000, 2000: 85–108.
- [2] CRAWLEY-BOEVEY W. Poisson structures on moduli spaces of representations [J]. Journal of Algebra, 2011, 325: 205–215.
- [3] BERGH MVAN DEN. Double Poisson algebras [J]. Trans Amer Math Soc, 2008, 360: 5711–5769.
- [4] CRAWLEY-BOEVEY W, ETINGOF P, GINZBURG V. Noncommutative geometry and quiver algebras [J]. Adv Math, 2007, 209(1): 274–336.
- [5] BEREST Y, KHACHATRYAN G, RAMADOSS A. Derived representation schemes and cyclic homology [J]. Adv Math, 2013, 245: 625–689.
- [6] BEREST Y, FELDER G, RAMADOSS A. Derived representation schemes and noncommutative geometry [C]//Contemp Math, 2014, 607: 113–162.
- [7] TOËN B, VAQUIE M. Moduli of objects in dg-categories [J]. Ann Sci Éc Norm Sup, 2007, 40(3): 387–444.
- [8] FARKAS D, LETZTER G. Ring theory from symplectic geometry [J]. J Pure Appl Algebra, 1998, 125: 155–190.
- [9] BLOCK J, GETZLER E. Quantization of foliations [C]// Proceedings of the XXth International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, Vol. 1, 2, New York, 1991. River Edge, NJ: World Sci Publishing, 1992: 471–487.
- [10] XU P. Noncommutative Poisson algebras [J]. Amer J Math, 1994, 116: 101–125.
- [11] PROCESI C. Rings with Polynomial Identities [M]. New York: Marcel Dekker, 1973.
- [12] ARDIZZONI A, GALLUZZI F, VACCARINO F. A new family of algebras whose representation schemes are smooth [J]. Ann Inst Fourier (Grenoble), 2016, 66(3): 1261–1277.
- [13] CUNTZ J, QUILLEN D. Cyclic homology and nonsingularity [J]. J Amer Math Soc, 1995, 8(2): 373–442.
- [14] HARRISON D. Commutative algebras and cohomology [J]. Trans Amer Math Soc, 1962, 104: 191–204.
- [15] Van den BERGH M. Non-commutative quasi-Hamiltonian spaces [C]//Poisson geometry in mathematics and physics, 273–299, Contemp Math 450, Amer Math Soc, Providence, RI, 2008.
- [16] LODAY J. Cyclic homology [M]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [17] FEIGIN B, TSYGAN B. Additive K-theory and crystalline cohomology [J]. Funct Anal Appl, 1985, 19(2): 124–132.
- [18] BEREST Y, CHEN X, ESHMATOV A, et al. Noncommutative Poisson structures, derived representation schemes and Calabi-Yau algebras [C]//Contemp Math, 2012, 583: 219–246.
- [19] CALAQUE D, PANTEV T, TOËN B, et al. Shifted Poisson structures and deformation quantization [J]. J Topol, 2017, 10(2): 483–584.
- [20] CHEN X, ESHMATOV A, ESHMATOV F, et al. The derived non-commutative Poisson bracket on Koszul Calabi-Yau algebras [J]. J Noncommut Geom, 2017, 11(1): 111–160.
- [21] CHEN X, ESHMATOV F. Calabi-Yau algebras and the shifted noncommutative symplectic structure [J]. Adv Math, 2020, 367: 107–126.
- [22] PANTEV T, TOËN B, VAQUIÉ M, et al. Shifted symplectic structures [J]. Publ Math Inst Hautes Etudes Sci, 2013, 117: 271–328.
- [23] YEUNG W. Pre-Calabi-Yau structures and moduli of representations [J]. ArXiv, 2018. [arXiv:1802.05398]
- [24] GINZBURG V. Calabi-Yau algebras [J]. ArXiv, 2006. [arXiv:math/0612139]
- [25] REYES M, ROGALSKI D, ZHANG J. Skew Calabi-Yau algebras and Homological identities [J]. Adv Math, 2014, 264: 308–354.
- [26] BRIDGELAND T, KING A, REID M. The McKay correspondence as an equivalence of derived categories [J]. J Amer Math Soc, 2001, 14(3): 535–554.

- [27] Van den BERGH M. Non-commutative crepant resolutions [M]. The Legacy of Niels Henrik Abel (Berlin), Berlin: Springer, 2004: 749–770.
- [28] KELLER B. Deformed Calabi–Yau completions [J]. J Reine Angew Math, 2011, 654: 125–180.
- [29] BROOMHEAD N. Dimer models and Calabi–Yau algebras [J]. Mem Amer Math Soc, 2012, 215(1011): viii+86.
- [30] DAVISON B. Superpotential algebras and manifolds [J]. Adv Math, 2012, 231: 879–912.
- [31] KONTSEVICH M. Homological algebra of Mirror Symmetry [J]. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich 1994, (vol. I). Birkhäuser: 1995: 120–139.
- [32] COSTELLO K. Topological conformal field theories and Calabi–Yau categories [J]. Adv Math, 2007, 210(1): 165–214.
- [33] KONTSEVICH M, SOIBELMAN Y. Notes on A_∞ -algebras, A_∞ -categories and non-commutative geometry [C]// Homological Mirror Symmetry, Lecture Notes in Phys 757. Berlin: Springer, 2009: 153–219.
- [34] HUYBRECHTS D. Fourier–Mukai Transforms In Algebraic Geometry [M]. Oxford Mathematical Monographs, Oxford: Oxford University Press, (2006): viii+307.
- [35] FUKAYA K, OH Y, OHTA H, et al. Lagrangian Intersection Floer Theory: Anomaly and Obstruction, Part I and II [M]//AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, (Vol 46), 2009.
- [36] SEIDEL P. Fukaya categories and Picard–Lefschetz theory [M]// Zürich Lectures in Advanced Mathematics, Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2008.
- [37] KELLER B. Calabi–Yau triangulated categories [M]. Trends in representation theory of algebras and related topics, EMS Ser Congr Rep, Zürich: European Mathematical Society, 2008: 467–489.
- [38] BRAV C, DYCKERHOFF T. Relative Calabi–Yau structures [J]. Compos Math, 2019, 155(2): 372–412.
- [39] CHEN X, HER H, SUN S, et al. A double Poisson algebra structure on Fukaya categories [J]. J Geom Phys, 2015, 98: 57–76.
- [40] LU D, PALMIERI J, WU Q, et al. A_∞ -structure on Ext-algebras [J]. J Pure Appl Algebra, 2009, 213: 2017–2037.
- [41] Van den BERGH M. Calabi–Yau algebras and superpotentials [J]. Selecta Math (N. S.), 2015, 21(2): 555–603.
- [42] BEREST Y, RAMADOSS A, ZHANG Y. Hodge decomposition of string topology [J]. arXiv, 2002. [arXiv:2002.06596v2].
- [43] BEREST Y, FELDER G, PATOTSKI A, et al. Lie algebra cohomology and the derived Harish–Chandra homomorphism [J]. J Eur Math Soc, 2017, 19: 2811–2893.
- [44] RAMADOSS A, ZHANG Y. Cyclic pairings and derived Poisson structures [J]. New York J Math, 2019, 25: 1–44.

(责任编辑 冯兆永)